Cono di volatilità, riferimenti metodologici & capitalizzazione composta del rendimento.

Eusepi Francesco[1] and Engineering Area Wealth Management[2]

[1] *Francesco.Eusepi@eng.it*
[2] *wealth.management@eng.it*

11 giugno 2024

Sommario

Dinamica tempotale (t) per rendimento medio $\mu(t)$ e la volatilità $\sigma(t)$ nel modello di *wiener* per uno strumento finanziario, secondo la capitalizzazione semplice e la capitalizzazione composta. In appendice alcuni riferimenti ai fondamenti teorici sulle caratteristiche del moto browniano.

Indice

Elenco delle figure

Elenco delle tabelle

1 Premesse

Il presente articolo, riprende quanto trattato in letteratura in merito alla modellizzazione della dinamica temporale del prezzo di uno strumento finanziario, a partire dai valori iniziali di rendimento medio atteso (μ) e volatilità (σ). Il tema conclusivo è la formula per la capitalizzazione composta del rendimento (riprodotta sostanzialmente seguendo [3]) tuttavia sia la teoria per la capitalizzazione semplice che la trattazione teorica del perchè si usi il modello di *Wiener*, fornendo le origini modellistiche di tale approccio che risalgono alla trattazione teorica del moto browniano, sono riportati.
Infatti quanto indicato come processo di *Wiener* nella trattazione della dinamica del prezzo di uno strumento finanziario, esso stesso riporta alla originale trattazione di [2] che descrisse le basi teoriche successivamente divenute di dominio comune del moto browniano. Questo approccio motiva (dimostra e non prende per assunto) diversi aspetti quali ad esempio la dipendenza della volatilità σ dalla radice quadrata del tempo t quando la si considera come funzione del tempo $\sigma = \sigma(t)$, che appunto proviene dalla trattazione probabilistica del moto browniano.

1.1 Introduzione

Il modello qui descritto si riferisce alle proprietà $S = S(t)$ del valore del prezzo, al tempo t dello strumento finanziario (sia esso azione, titolo, prodotto strutturato, portafoglio), con rendimento μ e volatilità σ sia espresso dal valore al tempo $t = t_0$, quand'esso si evolve nel tempo come una particella in un fluido o come un fluido che si diffonde in un mezzo, ovvero secondo l'equazione

$$dS = \mu S dt + \sigma S \epsilon \sqrt{dt} \tag{1}$$

in cui ϵ rappresenta il termine probabilistico (stocastico) e la cui soluzione è (si veda [3]) è una funzione normale (Gaussiana) con media μdt e deviazione standard $\sigma\sqrt{dt}$

$$\frac{dS}{S} = \phi(\mu dt, \sigma\sqrt{dt}) \tag{2}$$

Prima di rappresentare le quantità in 2, va detto che tale assunzione (assimilare il prezzo di uno strumento alla diffusione di un fluido in un altro fluido o di una particella in un fluido) è motivata dal fatto (si veda appendice A a pagina 6) che l'equazione 1 e la suo soluzione, trattano come sottostante gli aspetti probabilistici del fenomeno della diffusione di una funzione f come variabile dello spazio $\mathbf{x}$ e del tempo t ovvero come variabile di $(\mathbf{x}, t)$ e proprio nella interpretazione probabilistica del moto browniano, è immediato vedere che la deviazione standard dipenda da $\sqrt{t}$ e il valore medio da t come appunto nella equazione 1 e nella sua soluzione nella relazione 2.

In altri termini, assimilando l'evoluzione del prezzo $S = S_{\mu,\sigma}(t)$ di uno strumento finanziario, ad una particella che si diffonde in un fluido (il mercato finanziario) e che nel processo di diffusione è soggetto ad un moto di tipo browniano, allora l'equazione 1 ne rappresenta la equazione della dinamica e la funzione in 2 ne rappresenta la soluzione generale. Nella relazione 2 le quantità che intervengono sono pertanto la deviazione standard σ alla quale però viene associata anche la dipendenza temporale Δt (il termine σ della distribuzione di Gauss standard viene sostituito dal termine $\sigma\Delta t$) ed il valore medio μ che risulta essere funzione del tempo pertanto al termine μ si sostituisce $\mu\delta t$, pervenendo alla forma più diffusa:

$$\Delta S = S\mu\Delta t + \sigma\epsilon\sqrt{t} \tag{3}$$

Qui pertanto μ rappresenta il tasso di crescita di $S_{\mu,\sigma}$ nell'unità di tempo Δt e σ la deviazione standard (diciamo iniziale al tempo t_0) e pertanto $\sigma\sqrt{t}$ la deviazione standard al tempo t. Il termine ϵ rappresenta la componente statistica (stocastica, probabilistica) e si intende essere per l'appunto ben rappresentata da un fenomeno diffusivo.
La relazione 3 è tuttavia tanto più giustificabile, quanto più piccolo il valore dell'incremento temporale ovvero quando $\Delta t \sim 0$ e dimostra dei limiti nel prevedere la quantità $S = S_{\mu,\sigma}(t)$, quando $t \gg \Delta t$ ovvero la relazione $\sigma = \sigma_0\sqrt{t}$ diventa meno efficacie nel prevedere l'effettivo comportamento del mercato in termini di volatilità, al crescere di t. La presente *Documentazione* , volendo trattare la materia qui introdotta si propone pertanto di :

- descrivere gli aspetti formali matematici dell'equazione 1 nella pagina precedente, riferendosi alla sua deduzione che si rifà addirittura al celebre [2], questo è svolto compiutamente al paragrafo A a pagina 6,

- ricondurre la tematica all'aspetto finanziario ovvero al prezzo dello strumento finanziario con le sue peculiarità fino alla formula per la capitalizzazione composta dei rendimenti ricalcando quanto in letteratura a partire da [3], derivando quindi l'espressione per il così detto cono di volatilità, per uno strumento finanziario generale caratterizzato da un rendimento indicato con μ e volatilità indicata con σ.

2 Composizione del rendimento e risultante cono di volatilità.

Assumendo che in equazione 2 nella pagina precedente, si possa assumere σ come volatilità iniziale e $\sigma\sqrt{t}$ come evoluzione temporale, si pone il tema di verificare la composizione del rendimento della azione di prezzo S. Il modello di *Merton*, [3] si verifica descriva proprio questa situazione, ovvero di capitalizzazione composta del rendimento μ come evoluzione della capitalizzazione semplice.

$$\frac{\Delta S}{S} \sim \phi(\mu\Delta t, \sigma\sqrt{t}) \tag{4}$$

dove ϕ rappresenta la distr. normale con media $\mu\Delta t$ e deviazione standard $\sigma\sqrt{\Delta t}$ si sta implicando proprio la capitalizzazione composta rispetto quella semplice che si basa invece su :

$$\Delta S \sim \phi(\mu\Delta t, \sigma\sqrt{t}) \tag{5}$$

Si vede infatti che in equazione 5 la dipendenza di S da t è del tipo $S = S_0 + \mu t$ ovvero lineare (capitalizzazione semplice), mentre in equazione 4 si sta assumendo una dipendenza del tipo $dS = \mu S dt$ che è l'espressione differenziale relativa alla composizione $S = S_0 + (1+\mu)^t$ nel caso discreto ovvero alla $S = S_0 e^{\mu t}$ nel caso continuo, sempre tenendo conto che S_0 è il prezzo iniziale della azione ovvero al tempo $t = 0$ secondo $S(t = 0) = S_0$.

2.1 Stock price con capitalizzazione dei rendimenti

Si veda pertanto in [3] che inserendo la capitalizzazione composta ovvero considerando il processo di Wiener nella forma :

$$\frac{\Delta S}{S} = \mu \Delta t + \sigma \sqrt{t} \tag{6}$$

dove non è evoluta la capitalizzazione semplice che avrebbe portato la linearità $S = \mu dt + b\sqrt{t}$ ma si considera piuttosto μ come return rate composto $\frac{\Delta S}{S} = \mu$ dt ovvero $\Delta S = S\mu\Delta t$

si perviene alla relazione:

$$\frac{\Delta S}{S} = \mu \Delta t + \sigma \sqrt{\Delta t} \tag{7}$$

$$S = S_0 e^{\mu t} \pm \sigma \sqrt{t} \tag{8}$$

che prevede una crescita *esponenziale* per $S = S(t)$ (appunto in capitalizzazione composta) rispetto alla crescita lineare $S = S_0 + \mu t$ in capitalizzazione semplice (o lineare).

Si consideri che quando μ è piccolo, ovvero quando $\mu \sim \ln(1 + \mu)$ allora[1] $e^{\mu t} - 1 \sim (1 + \mu)^t - 1 \sim \mu t$ e quindi le differenze tra capitalizzazione composta continua, composta discreta e semplice, sono piccole.

Nell'esempio allegato, dove $\mu = 4.43 \times 10^{-4}$ si ha $S = S_0 e^{\mu t} - 1 = 0.0233252$ dopo 52 settimane in capitalizzazione composta e $S = (1 + \mu)^t - 1 = 0.02332520$ sempre dopo 52 settimane in capitalizzazione semplice.

Si riporta l'immagine del cono di volatilità, prodotto dalla formula 7, (rif. dettagli modello, esempio perativo),dove $\mu = 4.43 \times 10{-}4$ su base settimanale ($\frac{1}{52}$ della base annuale pari a $\mu = 0.02332$), deviazione standard $\sigma_w = 0.01614 = \frac{\sigma_y}{\sqrt{t}}$ dove $\sigma_y = 0.116390$.

Indice	DeusID	Peso %	Expected Return rate
123700	AC6400314031B157D14C	50,00 %	2.00 %
123800	AC6400314031BC2733FC	40,00 %	3.00 %
126400	ACD4004E23E26838B0C0	7,00 %	1.50 %
127000	ACD4004E24CF4A8065C0	3,00 %	0.90 %

Tabella 1: Portafoglio Modello, caratteristiche di dettaglio dell'esempio utilizzato per le stime numeriche.

[1] si utilizza qui la relazione $\ln(1 + x) \sim x$ se $x \to 0$, per la quale si veda [4].

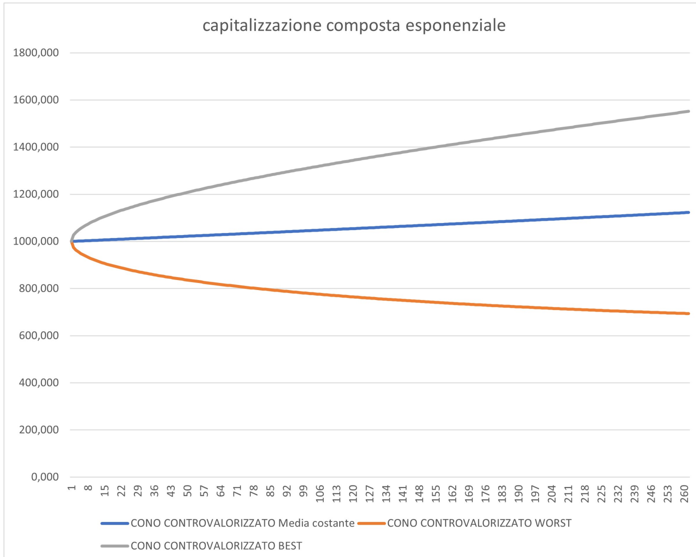

Figura 1: Raffigurazione grafica del cono di volatilità con capitalizzazione continua dello stock return, per n settimane.

Input	rif.	Dati
ExRet	μ_w	0,000443
DevSt T1	σ_y	11,6390 %
DevSt	σ_w	1,614039 %
Conf Level		90 %
Last Return		0
ExRetAnnual	μ_y	0,02332

Tabella 2: Prospetto parametri utilizzati in esempio.

In figura 1 si riporta la rappresentazione grafica del cono.

2.2 Lognormalità e formula finale della capitalizzazione composta dei rendimenti.

Approfondendo ulteriormente, (si veda il capitolo 13 in [3]) si deriva che l'equazione seguente

$$\frac{\Delta S}{S} = \phi(\mu \Delta t, \sigma \sqrt{t}) \tag{9}$$

dove ΔS rappresenta la variazione del prezzo S nel tempo Δt e con $\phi(m, s)$ si indica la distribuzione normale con media m e deviazione standard s, prevede come soluzione generale la funzione $S = S(t)$ con le seguenti caratteristiche:

oggetto	valore medio	varianza
$\ln(S_t)$	$\ln S_0 + (\mu - \frac{\sigma^2}{2})t$	$\sigma\sqrt{t}$
S_t	$E(S_t) = S_0 e^{\mu t}$	$var(S_t) = S_0^2(e^{2\mu} - 1)$

Tabella 3: riassunto delle relazioni ottenute per i parametri μe σ.

Input	rif.	Dati
ExRet weekly	μ_w	$0,000443$
DevSt annual	σ_y	$11,6390\%$
DevSt weekly	σ_w	$1,614039\%$
Confidence Level		90%
Last Return		0
ExRet annual	μ_y	$0,02332$
annual Return Log Normal	ρ_y	$0,016546684$
weekly Return Log Normal	ρ_w	$0,0003157$

Tabella 4: Valori esemplificativi applicando la teoria al portafoglio modello.

$$\ln(S_t) - ln(S_0) \sim \phi((\mu - \frac{\sigma^2}{2})t, \sigma\sqrt{t}) \tag{10}$$

$$\ln\frac{S_t}{S_0} \sim \phi((\mu - \frac{\sigma^2}{2})t, \sigma\sqrt{t}) \tag{11}$$

$$\ln(S_t) \sim \phi(lnS_0 + (\mu - \frac{\sigma^2}{2})t, \sigma\sqrt{t}) \tag{12}$$

in altri termine nel regime di capitalizzazione composta risulta ad essere $\ln(S)$ (e non S) Gaussianamente o normalmente distribuita, pertanto $S_{\mu,\sigma} = S(t)$ risulta Log-normalmente distribuita. Il valore medio di $\ln(S_t)$ è pari a $(\ln S_0 + (\mu - \frac{\sigma^2}{2}))t$ e la deviazione standard è pari a $\sigma\sqrt{t}$, come di seguito riassunto:

utilizzando pertanto il rendimento log-normale, si avrà per l'esempio qui presentato con la versione finale, tenendo conto della lognormalità:

dove i valori di Annual e Weekly (ρ_y e ρ_w) return rate sono calcolati secondo l'equazione risultante dai passaggi sopra esposti,

$$\rho(t) = (\mu - \frac{\sigma^2}{2})t \tag{13}$$

Con riferimento all'esempio proposto, a $t = 1Y$ (52 settimane), il cono senza log normalità vale $(831.88, 1214.77)$ mentre il cono con log normalità vale $(825.10, 1207.99)$ quindi con uno shift verso un rendimento leggermente minore come ci aspetterebbe appunto dall'equazione 13.

In figura 2 nella pagina successiva si riporta la rappresentazione grafica del cono con il rendimento da equazione 13.

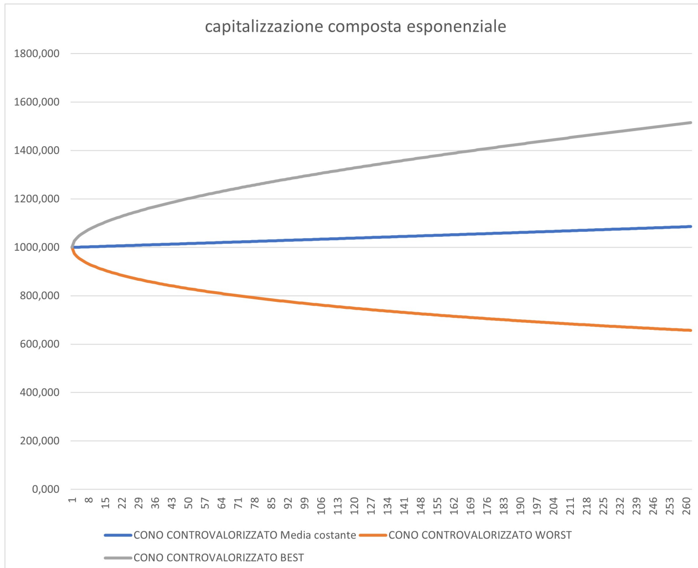

Figura 2: Raffigurazione grafica del cono di volatilità con capitalizzazione continua dello stock return, per n settimane, tenendo conto dell'equazione 13 nella pagina precedente in capitalizzazione composta tenendo conto della log-normalità.

A Deduzione dell'eq. della diffusione a partire dal moto browniano, fondamenti del processo di Wiener.

La proprietà usata nelle relazione 6, che in [3] è indicato come processo di *Wiener*, ovvero che un sistema dinamico stocastico possa essere descritto dall'equazione della diffusione, dove $\sigma \sim \sqrt{t}$ affonda le sue radici nella deduzione statistica dell'equazione della diffusione stessa e nella sua soluzione che sono stati dedotti per la prima volta in [2]. Si segue alla lettere quanto in [2], semplicemente tradotto in italiano, mentre il testo segue l'originale articolo, le note a piè di pagina contengono spiegazioni aggiuntive.
Precedente all'articolo qui riportato è la discussione [2] della natura molecolare della teoria del calore, cui segue appunto la deduzione dell'equazione del calore (o eq. della diffusione) e poi la dimostrazione della natura atomica del processo di diffusione del calore.

Si considera il caso di n particelle sospese in un fluido. In un tempo[3] τ la coordinata X di ogni particella [4] si sposta di una grandezza Δ laddove i Δ sono diversi per le singole n-particelle. Per Δ varrà allora una certa distribuzione di probabilità, $\phi(\Delta)$ tale per cui il numero di particelle dn che nel tempo τ effettuano uno spostamento posizionale compreso tra Δ e $\Delta + \Delta$ è dato da[5]

$$dn = n\phi(\Delta)d\Delta \tag{14}$$

[2] di natura modellistico teorico-fisco matematico [3] piccolo [4] posizione sull'asse delle ascisse
[5] Il numero di particelle che fanno il salto $d\Delta$ è proprio n per la probabilità che di trovarsi al punto Δ ovvero $\phi(\Delta)$.

laddove[6]

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \phi(\Delta) = 1 \tag{15}$$

laddove vale che $\phi(\Delta) \neq 0$ solo per piccoli valori di Δ e dove vale la relazione[7] $\phi(\Delta) = \phi(-\Delta)$.
Si ricerca la valorizzazione del coefficiente di diffusione[8] come funzione di ϕ limitatamente al fatto che il numero di particelle υ per unità di volume dipenda solo da x e da t.[9] Sia pertanto $\upsilon = f(x,t)$ il numero di particelle per unità di volume, quando il volume è centrato nel punto x al tempo t, calcoliamo[10] la distribuzione delle particelle al tempo $t + \tau$ dalla distribuzione al tempo t.
Dalla definizione della funzione $\phi(\Delta)$ si ottiene facilmente il numero delle particelle che nel tempo $t + \tau$ si trovano sull'asse X delle ascisse, tra il punto x ed $x + dx$, ovvero[11]

$$f(x, t+\tau)dx = dx \int_{\Delta=-\infty}^{\Delta=+\infty} f(x+\Delta)\phi(\Delta)d\Delta \tag{16}$$

inoltre essendo τ piccolo possiamo porre

$$f(x, t+\tau) = f(x,t) + \tau\frac{\partial f}{\partial t} \tag{17}$$

Successivamente sviluppiamo $f(x + \Delta, t)$ come potenza di Δ e si ottiene[12]

$$f(x+\Delta, t) = f(x,t) + \Delta\frac{\partial f(x,t)}{\partial x} + \frac{\Delta^2}{2!}\frac{\partial^2 f(x,t)}{\partial x^2} + \dots \tag{18}$$

Questo sviluppo si può portare sotto l'integrale[13] e si ottiene pertanto mettendo in equazione 16 quanto ottenuto in 17 ed in 18 si ottiene

$$f + \frac{\partial f}{\partial t}\tau = f\int_{\Delta=-\infty}^{\Delta=+\infty} \phi(\Delta)d\Delta + \frac{\partial f}{\partial x}\int_{\Delta=-\infty}^{\Delta=+\infty} \Delta\phi(\Delta)d\Delta + \frac{\partial^2}{\partial x^2}\int_{\Delta=-\infty}^{\Delta=+\infty} \frac{\Delta^2}{2}\phi(\Delta)d\Delta \dots \tag{19}$$

Nella parte destra il primo termine vale f ricordando che

$$\int \phi(\Delta)d\Delta = 1 \tag{20}$$

mentre il secondo , quarto, .. membro svaniscono essendo $\phi(x) = \phi(-x)$, e tralasciando i termini superiori perché di ordine inferiore, indicando con D:

$$\frac{1}{\tau}\int_{\Delta=-\infty}^{\Delta=+\infty} \frac{\Delta^2}{2}\phi(\Delta)d\Delta = D \tag{21}$$

[6] $\phi(\Delta)$ è normale su $\mathcal{R}$ perché per definizione la probabilità che una particella sia in $x \in \mathcal{R}$ è 1.
[7] ϕ è simmetrica rispetto al punto scelto come origine in quanto le ne particelle si diffondono a sinistra ed a destra dell'origine nel medesimo modo. [8] si assume che la diffusione sia dovuto al salto delle particelle di ampiezza Δ dove esiste la probabilità$\phi(\Delta)d\Delta$ di effettuare un salto tra Δ e $\Delta + d\Delta$, pertanto si perviene naturalmente alla equazione 14 nella pagina precedente per le particelle che effettuano proprio questo salto. [9] si escludono quindi altri contributi esterni alla funzione di distribuzione. [10] la notazione $\upsilon = f(x,t)$ assume proprio che υ sia una funzione del tempo t e del posto x. Il mezzo qui è descritto come isotropo, le particelle come non interagenti..sono assunzioni che però permettono di andare al cuore del problema.
[11] sono proprio le particelle che hanno effettuato il salto Δ nel tempo τ per arrivare al punto x. In altri termini, quali sono le particelle in $(x, x + dx)$ al tempo $t + \tau$? Sono le particelle che hanno fatto il *giusto* salto posizionale Δ nel tempo τ tale da portarle in x (tali da portarle tra x ed $x + dx$) moltiplicato per la probabilità di fare il salto Δ, sommato su tutti i possibili salti Δ. Questa relazione è il cuore dello sviluppo e modellizza la nozione stocastica di diffusione su base molecolare, ovvero a *salti*. [12] sviluppo in serie di Taylor di ϕ come funzione di Δ
[13] l'integrale in equazione 16

si ottiene

$$\frac{\partial f}{\partial t} = D\frac{\partial^2 f}{\partial^2 x} \tag{22}$$

Questa è la nota equazione della diffusione dove D rappresenta il coefficiente di diffusione. Considerando le condizioni

$$f(x,t) = 0 \tag{23}$$

per[14] $t = 0$ & $x \neq 0$ e la condizione[15]

$$\int f(x,t)dx = n \tag{24}$$

La soluzione dell'edizione 22

$$f(x,t) = \frac{n}{\sqrt{4\pi D}}\frac{e^{-\frac{x^2}{4Dt}}}{\sqrt{t}} \tag{25}$$

e il coefficiente di diffusione D è stato dedotto essere come in equazione 21 nella pagina precedente in relazione con lo scarto quadratico medio λ_x secondo la relazione

$$\lambda_x = \sqrt{x^2} = \sqrt{2Dt} \tag{26}$$

E' proprio in equazione 26 emerge la relazione in cui lo scarto quadratico medio è proporzionale alla radice quadrata di t. L'articolo prosegue con l'utilizzo di tale approccio per successive considerazioni in merito alla descrizione diffusiva del calore (si veda [1]).

B Soluzione dell'equazione della diffusione

Si è utilizzato nella trattazione precedente il risultato seguente, ovvero che che la soluzione generale dell'equazione delle diffusione è una funzione normale con specifiche caratteristiche, se ne riassumono qui alcune qualità generali. L'equazione della diffusione (monodimensionale) è un'equazione alle derivate parziali della forma

$$u_t = \alpha^2 u_{xx} \tag{27}$$

alla quale viene associata la condizione iniziale sulla *forma* di $u(x,t)$ al tempo $t = 0$ ovvero

$$u_0(x, t = 0) = \phi(x) \tag{28}$$

tale equazione descrive la diffusione della forma iniziale $u(x,t = 0) = \phi(x)$, nel tempo, attraverso il coefficiente di diffusione α^2. In termini generale descrive la diffusione di una funzione u=u(x,t), laddove al trascorrere del tempo t la funzione si *allarga*, come sottoposta ad un processo diffusivo appunto, con il passare del tempo. Questo aspetto della soluzione della equazione sopra indicata si evidenzia subiuto nella soluzione così detta, soluzione particolare ovvero una gaussiana con centro in x=0 e deviazione standard proporzianle ad $\alpha\sqrt{t}$, si dimostra infatti che la seguente funzione è soluzione:

[14] al tempo $t = 0$ ci sono particelle solo nell'origine degli assi, le particelle sono concentrate prima di iniziare il processo di diffusione. [15] ci sono ne particelle sull'asse delle x, come precedentemente assunto.

$$S(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi\alpha^2 t}} e^{-\frac{x^2}{4\alpha^2 t}} \tag{29}$$

La soluzione generale dell'equazione è ottenuta per sovrapposizione della soluzione fondamentale definita come in equazione 29 che diffonde la forma iniziale $\phi(x)$ trasportata dalla soluzione fondamentale, conducendo alla soluzione generale:

$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi\alpha^2 t}} \int_{-\infty}^{+\infty} S(x-y,t)\phi(y)dy = \frac{1}{\sqrt{4\pi\alpha^2 t}} \int e^{-\frac{(x-y)^2}{4\alpha^2 t}} \phi(y)dy \tag{30}$$

. Al di là della derivazione dei risultati di cui sopra è rilevante osservare che, la soluzione fondamentale (e quella generale) è una funzione normale con deviazione standard proporzionale alla $\sqrt{t}$ essendo che la deviazione standard $\sigma = \sqrt{2\alpha^2 t}$. Si confronti infatti la soluzione fondamentale dell'equazione del calore (eq 30) con la espressione generale della funzione di Gauss normalizzata:

$$N(x,\mu,\sigma,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \tag{31}$$

Si evidenzia quindi la conclusione anticipata, trattazione probabilistica del moto browniano, equazione differenziale della diffusione e dipendenza della deviazione standard dalla radice quadrata del tempo, sono uno conseguenza dell'altro.

Riferimenti bibliografici

[1] A. Einstein. Úber die von der molekularkinetischen theorie der wárme gefordete bewegung von in ruhenden flússigkeiten suspendierten teilchen. Annalen der Physics (1905), pages 549–560, 1905.

[2] A. Einstein. Ueber die ungeordenete bewegung von in einer flússigkeit suspendierten teilchen und deren beziehung zur diffusion. Ann. d. Physics (1905), pages 556–559, 1906.

[3] John C. Hull. Options, Futures & other Derivatives. Pearson, New York, 2018.

[4] Walter Rudin. Principles of Mathematical Analysis. McGraw-Hill, New York, 1990.