

Proxy del Portafoglio di CERTIFICATES della BANCA .

Eusepi Francesco¹, Silvia Zamperlin², Michele Gallina³, Eric Bonfadini⁴,
and Federico Guarracino⁵

¹*francesco.eusepi@eng.it*

²*silvia.zamperlin@eng.it*

³*michele.gallina@eng.it*

⁴*eric.bonfadini@eng.it*

⁵*federico.guarracino@eng.it*

21 febbraio 2024

Sommario

Si presenta un modello teorico generale quantitativo, per l'associazione di un ISR (*Indicatore Sintetico di Rischio*) ad ogni elemento di un insieme di n -INDICI quotati, al fine di utilizzare gli stessi come proxy per un generico portafoglio di m -CERTIFICATES in gestione ad una istituzione finanziaria. Questo problema occorre in una ampia casistica di situazioni ovvero tutte le volte che una BANCA ha a disposizione un portafoglio (clienti, proprietario..) di prodotti finanziari di tipo CERTIFICATES per i quali necessita di un benchmark significativo in termini di rischiosità. La associazione di un ISR ad ogni INDICE realizza (essendo l'ISR presente anche nei KID dei CERTIFICATES) tale associazione sotto opportune condizioni qui descritte e con la possibilità di correzioni migliorative o peggiorative realizzate in fase di attribuzione dell'ISR stesso all'INDICE . Si include anche un' appendice matematica dove vengono riportati passaggi espliciti per le deduzioni & riproduzione completa dei risultati quantitativi esposti. ¹

Indice

Elenco delle figure	2
Elenco delle tabelle	2
1 Introduzione	1
2 Descrizione del Modello .	2
3 Il Modello	4
3.1 Associazione del VAR ad ogni INDICE e clusterizzazione in classi di ISR Rating	4
3.2 INDICI Selezionati	7
3.3 Correlazione	8

¹ Si ringrazia l'Area Wealth Management di Engineering, per il supporto e la collaborazione:
wealth_management@eng.it.

A	Dettagli Matematici del modello sviluppato.	10
A.1	Analisi approfondita in merito al minimo del VAR	10
A.2	Ulteriori considerazioni sul calcolo di A (valore minimo di $ v $) . . .	11
A.3	Elementi avanzati sul $ v _{min}$	12
B	Introduzione alla teorie perturbative del termine principale.	13
B.1	Modello con termine sigmoideale.	13
B.1.1	Funzione sigmoideale teoria generale	14
B.2	Modello a 2 parametri e soluzione vincolata	15
B.2.1	Soluzione per i parametri A ed α	16
C	Arrotondamento di R	17
D	Logiche di individuazione degli indici.	18
D.1	introduzione	18
D.2	Logiche di raffinamento.	18
D.3	Esempio di scelta per raffinamento degli INDICI di IsR 4.	18
	Riferimenti bibliografici	21
	Elenco delle figure	
1	Model	3
2	plot del VAR	5
	Elenco delle tabelle	
1	INDICI	7
2	risultati-INDICI di approssimazione	8
3	Tabella riassuntiva degli INDICI di approssimazione (Proxy) dei CERTIFICATEES differenziati per classi di sottostante e Indicatore Sintetico di Rischio IsR.	9
4	Tabella VAR	17
5	scelta degli INDICI , esempio.	19
6	INDICI IsR 4	21

1 Introduzione

La BANCA include² nei propri portafogli di investimento e portafogli clienti strumenti finanziari di tipo CERTIFICATES , proprietari e/o emessi da terze parti ³, per i quali desidera approssimare l'andamento (serie storica) temporale dei prezzi e del rischio con degli opportuni INDICI di mercato con profilo di rischio simile al CERTIFICATES stesso.

La presente analisi riporta le soluzioni identificate, la logica proposta e il set di INDICI di riferimento scelti all'interno di un insieme di n - INDICI quotati presi in considerazione nell'analisi. In particolare i CERTIFICATES presi in esame hanno strutture di diverso tipo con un sottostante di tipo⁴ *Obbligazionario, Azionari o Altro* (es INDICI , anch'essi event. compositi, future...)⁵.

I CERTIFICATES possono essere di varia tipologia, ad esempio capitale (totalmente o parzialmente) garantito, così come con un effetto leva (Short o Long) e/o con capitale del tutto non garantito. In sostanza il profilo di rischio dei CERTIFICATES per i quali si desidera individuare un set di INDICI quali Proxy del loro andamento futuro coerente con il profilo di rischio, è generalmente di ampio spettro e questo è peraltro espresso nei prospetti KID dall'indicatore sintetico di rischio (IsR) che viene utilizzato nella presente analisi. L'indicatore sintetico di rischio IsR varia su una scala crescente da rischio basso 1 a rischio medio (4,5) a rischio molto alto 7 e quantifica secondo un algoritmo standard, il macro profilo di rischio dei CERTIFICATES cui viene assegnato.

Il modello qui descritto ha portato ad un' associazione completa di ogni CERTIFICATES analizzato al corrispondente INDICE di mercato, via IsR e tipologia, come riassunto in tabella 2 a pagina 8 che rappresenta il *risultato* della applicazione empirica (sui dati) della teoria, seppur su risultati esemplificativi, laddove le assunzioni matematiche e teoriche sono riportate in una forma generale nel paragrafo 2 nella pagina successiva ed in una forma più matematicamente avanzata e di dettaglio, con alcuni approfondimenti, nella appendice A a pagina 10.

La trattazione in appendice A.2 a pagina 11, la cui lettura può essere posposta per una prima comprensione del modello, è utile nelle sue conclusioni ovvero che una ricalibrazione su base annuale può essere considerata opportuna, sebbene la generale stabilità degli INDICI prescelti, per intercettare eventuali oscillazioni di mercato che influenzano il profilo di rischio e dei CERTIFICATES e degli INDICI .

La novità dell'approccio descritto sta nell'uso di argomenti di matematica avanzati, ad un problema di approssimazione generalmente affrontato con metodologie qualitative.

Non si sono indicate referenze specifiche per il modello bensì riferimenti bibliografici sui singoli componenti utilizzati, in quanto il modello è originale e sviluppato in modo dedicato dagli autori, non ha precedenti in letteratura. Tuttavia per le notazioni usate⁶ si può fare riferimento a [8] e [1] in ambito matematico analitico ed a [5], [4], [7], [9], [3] per le proprietà usate in materia di VAR e per le relazioni matematiche sulle funzioni del tipo in equazione 17 a pagina 14.

² da qui in avanti si intende con BANCA l'istituzione finanziaria (BANCA , sgr, ..) che censisce i CERTIFICATES tra i propri prodotti finanziari in gestione. ³ emittenti tipici sono istituti di credito quali Unicredit Group, Società General, Vontobel... ⁴ tra le possibili tipologie queste sono state le 3 scelte ma ovviamente altre categorizzazioni sono del tutto possibili. ⁵ la classificazione della tipologia dello strumento è una informazione che fornirà in generale la BANCA . Per la teoria qui descritta è rilevante che esista una classificazione, seppure macro, del sottostante. ⁶ la *Documentazione* è scritta in L^AT_EX si veda tra gli altri [2], [6] per dettagli.

2 Descrizione del Modello .

Alcune delle dimensioni di riferimento che caratterizzano il portafoglio-clienti - CERTIFICATES della BANCA ⁷ sono di seguito riportate:

- Tipologia, ad esempio
 1. a capitale interamente protetto,
 2. a capitale condizionatamente protetto
 3. a capitale non protetto,
 4. a leva.
- Rating S&P emittente.
- Tipologia di Sottostante : azionario (AZIO), obbligazionario (OBBL), altro (ALTR).
- Indicatore Sintetico di Rischio (ISR) presente nel KID di ogni CERTIFICATES . Misura su una scala crescente da 1 a 7 il rischio di mercato insito nel CERTIFICATES stesso.
- Sottostane (*bond, equity, currency, INDICE ...*)
- tipologia *short* o *long*. Con tipologia *short* si intende che il CERTIFICATES “scommette sulla variazione negativa del sottostante (sia esso un titolo, un INDICE un azione od un paniere di essi).

Tuttavia le molteplici tipologie di CERTIFICATES , una approssimazione mediante INDICE necessariamente procede attraverso quantità che possano da un lato correlarsi in modo chiaro ed univoco al profilo stesso, dall'altro ben definite e allo stesso tempo non equivocabili. Dopo una serie di analisi metodologiche ed empiriche, basate su portafogli di CERTIFICATES di varie banche-clienti, tra le dimensioni caratterizzanti ogni singolo Certificate in portafoglio della BANCA , le 2 dimensioni principali identificate come rilevanti per l'approssimazione tramite INDICI sono l'indicatore sintetico di rischio ISR e la tipologia di sottostante. ⁸

La ampia variabilità di profilo risk/return dei CERTIFICATES che sono per loro natura strutturati, ha guidato la scelta verso un numero limitato ma “solido” di informazioni da considerare. Su questo aspetto non ci si dilunga eccessivamente nel presente articolo, fermo restando che la considerazione di eventuali caratteristiche aggiuntive è integrata nel modello laddove si vada ad eseguire un tuning qualitativo o comunque ad hoc per portafogli specifici. ⁹

⁷ lo spazio i cui elementi sono strumenti di tipo CERTIFICATES C come verrà anche denominato in seguito ⁸ si noti che la tipologia di contratto, a capitale garantito, a leva, altro.. riporta al suo interno una ampio spettro di profili di rischio di mercato ovvero di ISR e non è pertanto un indicatore di classificazione particolarmente rilevanti. La classe degli strumenti ”a capitale protetto” contiene si tipicamente CERTIFICATES con ampio profilo di rischio e non è essa stessa espressione di un profilo di rischio univocamente caratterizzato. ⁹ portafogli di CERTIFICATES aventi per esempio esclusivamente CERTIFICATES a leva avranno un profilo di rischio “alto” laddove evidentemente l'aspetto speculativo e non-protetto del portafoglio ne caratterizzerebbe la rischiosità, a prescindere quindi dal modello stesso. Il modello qui sviluppato si applica ed è di aiuto nella profilazione del rischio di un portafoglio con un ampio spettro , varietà (e tendenzialmente numerosità) di CERTIFICATES dove la assegnazione manuale ed estemporanea di INDICI di approssimazione risulterebbe onerosa.

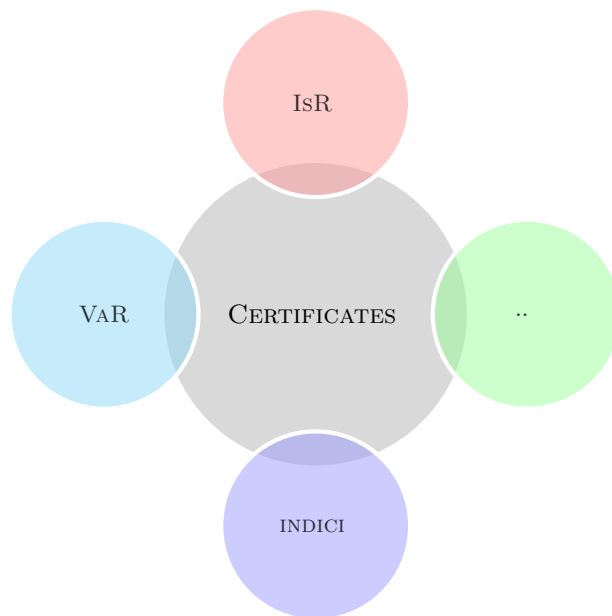


Figura 1: Si sono investigati i CERTIFICATES della BANCA , i loro IsR , gli INDICI disponibili ed il loro VAR al fine di essere messi in relazione e permette di approssimare i CERTIFICATES con gli INDICI prescelti.

3 Il Modello

Il modello proposto, permette di scegliere per ognuna delle categoria di mercato in esame (*Titoli obbligazionari, Azioni, Altro*), un' INDICE di riferimento (INDICE Proxy).

L'idea centrale è che essendo ogni CERTIFICATES (nella categoria) caratterizzato da una metrica di rischio, del tipo indicatore sintetico di rischio (ISR), anche gli INDICI selezionati possano essere caratterizzati (simulandolo) da un indicatore numerico sintetico (Rating-ISR o R) quale misura del profilo di rischio dell'INDICE stesso.¹⁰ Operativamente, nel corso dello sviluppo del modello le scelte seguenti sono state effettuate (riassunto):

- Suddividere lo spazio degli INDICI candidati ad essere *proxy* nelle 3 categorie esemplificative di riferimento: *Azionario, Obbligazionario, Altro*.
- Associare ad ogni INDICE il VAR v (la scelta operativa è ricaduta sulla frequenza weekly, su orizzonte di 3 anni nella esemplificazione proposta).
- Clusterizzare il valore del VAR (per categoria e per profilo di rischio) con una forma funzionale esponenziale come in equazione 2 a pagina 6.
- Verificare la alta correlazione tra INDICI nella stessa classe e bassa correlazione tra INDICI di Rating diverso.
- Stimare il valore $|v|_{min}$ minimo VAR su un periodo storico scelto di riferimento (18 mesi nell'esemplificazione). La necessità di questa componente è diffusamente descritta in appendice ?? a pagina ??

3.1 Associazione del VaR ad ogni indice e clusterizzazione in classi di IsR Rating

Il valore del Rating R ¹¹, che sarà poi utilizzato per approssimare l'ISR del CERTIFICATES , è stato modellizzato, ordinando i VAR degli INDICI in dominio, dal valore assoluto minore (meno rischio) al valore assoluto maggiore (più rischioso) ed approssimando l'andamento del VAR con un esponenziale (essendo il VAR per definizione negativo esponenziale decrescente) come mostrato in figura 2 nella pagina seguente definendo una relazione esponenziale tra il VAR stesso ed un da definirsi ISR R dell'INDICE .

Si in altri termini modellizza una dipendenza esponenziale del VAR da un indicatore di rischio discreto, numerico, che chiameremo R (Rating ISR , R), che

¹⁰ Si veda la appendice A a pagina 10 per i dettagli metodologici astratti relativi a questa assunzione. In sostanza lo spazio dei CERTIFICATES \mathcal{C} e lo spazio degli INDICI Ω (di una specifica categoria) sono entrambi dotati di una misura (metrica di rischio) e le due misure sono messe in relazione biunivoca. L'isomorfismo ha senso euristica-mente perché il profilo di rischio per entrambi gli oggetti, CERTIFICATES ed INDICI è espressione del medesimo fenomeno: il rischio di return (espresso dal VAR), sebbene i contenuto esatti modellistici dell'ISR presente nel KID non siano poi utilizzati ma ne sia utilizzato il risultato sintetico. Che esista una corrispondenza tra Ω e \mathcal{C} e che questa corrispondenza sia indotta dalla metrica ISR ed R sembra una ipotesi solida se è vero che entrambi gli indicatori siano sensibili al VAR v . Per una validazione fenomenologica di questa assunzione si fa riferimento ad una analisi sui dati presentata in altra *Documentazione* , volendo mantenere la trattazione qui riportata ad un livello teorico generale. La novità del modello come già altrove sottolineato sta nel proporre un ISR di un INDICE (per tutti gli INDICI) con opportune proprietà matematiche. ¹¹ con R si indicherà sinteticamente il Rating, si tratta dell'ISR R simulato per ogni INDICE al fine di realizzare la associazione con l'ISR del CERTIFICATES .

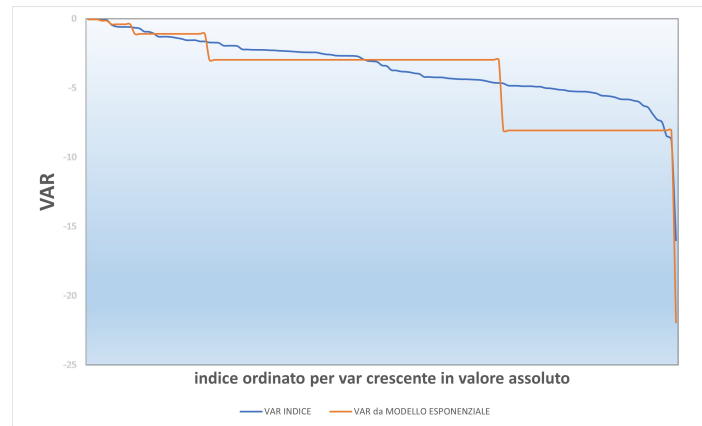


Figura 2: La figura mostra (linea blu) la successione dei VAR dall'INDICE meno rischioso al più rischioso, considerando tutti gli n INDICI esaminati ($n \sim 200$ INDICI tipicamente per la BANCA cliente, tuttavia nella analisi interna un insieme di indici maggiore è stato disponibile.) pertanto l'asse delle x rappresenta semplicemente il progressivo dell'INDICE corrispondente. La linea arancione riporta invece il VAR stimato da modello, per ogni valore dell'ISR $-R$ (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7), che approssima il VAR di mercato dell'INDICE stesso. Si vede che per ogni valore di $R \in (1, \dots, 7)$ spostandosi da sinistra a destra, c'è una buona approssimazione tra i VAR vero e simulato.

Se si considerasse un ISR $-R$ con un valore decimale l'accordo tra il VAR di mercato e quello simulato sarebbe ancora maggiore tuttavia si preferisce profilare nel modello un valore discreto per l'ISR $-R$ così da avere corrispondenza con la scala presente sui KID dei CERTIFICATES .

definiremo su una scala da 1 a 7 (per analogia con l'ISR dei CERTIFICATES) al quale verrà associato l'indicatore ISR dei CERTIFICATES¹²:

$$|v| = Ae^R \quad (1)$$

che invertita permette di ottenere R come funzione del VAR $|v|$ (e del parametro A).

$$R = \ln \frac{|v|}{A} \quad (2)$$

La relazione ad un parametro 2 permette di univocamente determinare l'ISR dell'INDICE R , laddove A venga fissato per replicare il VAR $|v|$ della classe "migliore" di INDICI ovvero (ricordando che Ω è lo spazio degli INDICI ed invertendo la $|v| = A \times e^R$ per $R = 1$) si ottiene:

$$A = \frac{\min(|v|)_\Omega}{e} \quad (3)$$

e che permette di riscrivere l'equazione 2 come:

$$R = \ln \frac{|v|}{A} = \ln \frac{|v|}{\min(|v|)_\Omega/e} = 1 + \ln \frac{|v|}{\min(|v|)} \quad (4)$$

dove si vede che il Rating R (ISR) inizia con il valore 1. Infatti per $|v| = \min(|v|)_\Omega$ il rapporto $\frac{|v|}{\min(|v|)} = 1$ vale proprio 1 pertanto $R = 1 + \ln(1) = 1$ e cresce logicamente secondo il rapporto tra il VAR $|v|$ dell'INDICE ed una costante¹³ (in questo caso il VAR minimo del paniere di INDICI ma in generale il VAR che si assegna al Rating $R = 1$ che può essere visto come valore a priori. Nella analisi condotta si è ottenuto $|v| = 0.02$ come valore del VAR corrispondente al Rating $R=1$ ma ovviamente questo valore dipenderà dall'insieme di INDICI che si sta utilizzando. Si sottolinea infatti la caratteristica di rilevanza che l'insieme di n indici scelti nella modellizzazione influisce significativamente sulla curva di equazione 2, proprio in virtù del fatto che il valore minimo del valore assoluto del VAR (ovvero l'indice con VAR più basso in valore assoluto ovvero l'indice meno rischioso) influenza poi successivamente l'intera curva esponenziale ed in particolare ne fissa necessariamente il punto di partenza. la trattazione della curva di cui in equazione 2 in funzione dell'indice prescelto per $R=1$ o comunque degli indici a rischio più basso emerge in tutta la sua rilevanza quando si applica la presente teoria a un portafoglio fenomenologicamente reale (ad una BANCA specifica) e si osserva che tendenzialmente CERTIFICATES col profilo di rischio di Euribor a 1/3/6 Mesi non ce ne sono in portafoglio. Qui si è preferito rimanere ad un livello teorico generale includendo ipoteticamente tutti gli indici disponibili, partendo quindi dall'Euribor quasi a sviluppare una teoria su un insieme n -indicizzato. Specificamente per la BANCA si partirà da VAR in valore assoluto più alti e pertanto non necessariamente dagli Euribor come INDICI di partenza. Rimane però che nella equazione 2 A ed il $|v|_{min}$ sono legati come qui descritto.¹⁴

¹² INDICI con $R=1$, simuleranno CERTIFICATES di ISR 1 e così via, tenendo conto del proprio comparto Obbligazionari, Azionario o Altro. ¹³ l'assunzione che il VAR abbia una dipendenza esponenziale dal Rating implica che il Rating dipenda logicamente dal VAR. ¹⁴ esula dalla presente trattazione che medesimo approccio si può utilizzare per individuare A a partire da un altro punto (v, R) in sostituzione del punto $(v_{min}, R = 1)$ ed addirittura come accennato alla sezione B.2 a pagina 15 si possono utilizzare più punti del tipo $x = (v_x, R_x), y = (v_y, R_y)$ quando la relazione in 2 assume una forma $|v| = e^{\alpha R}$ con due parametri. Il cuore è però quello descritto qui con il suo risultato principale come espresso in equazione 3.

3.2 indici Selezionati

La metodologia sviluppata, ha portato alla selezione di INDICI di riferimento per le classi di rischio (ISR) del CERTIFICATES all'interno di ognuna delle categorie identificate (Obbligazioni, Azioni, Altro).

Sono state fatte diverse ipotesi di associazione ISR - INDICI (esempio quella sotto in tabella 1) prima di pervenire alla associazione definitiva quale riportata in tabella 2 nella pagina seguente dove, la teoria è stata applicata ad un portafoglio di CERTIFICATES ed un set di INDICI reali. In merito alla classificazione che è riportata anche in tabella 1 si specifica qui che anche una maggiore granularità nell'associazione dei CERTIFICATES alla tipologia di sottostante è possibile, implicando ovviamente però che esistano un numero statisticamente sufficiente di INDICE in ogni classe di ISR definita. Sull'uso del modello qui sviluppato per sotto categorie di sottostante più granulari di quella qui esposta (in particolare dove la tipologia di sottostante i CERTIFICATES è maggiormente specificata) è previsto un altro articolo dedicato¹⁵.

Tabella 1: Tabella degli INDICI di approssimazione dei CERTIFICATES differenziati per classi di sottostante e ISR . Qui si noti che ogni INDICE quotato ha un VAR (sull'orizzonte prescelto) e quindi è di fatto classificabile con un ISR crescente. La novità del modello è come effettuare tale associazione ovvero la forma funzionale in equazione 2 nella pagina precedente in prima approssimazione e le sue evoluzioni.

Class	ISR	index	var range
	1	FBE EURIBOR 6M 360 EUR 3	-0,0588
	2	ICE BofAML Bond Indices 0-3 Year Euro Government Index LCL	-0,4389
	3	ICE BofAML Bond Indices Investment Grade Local Currency LCL	-0,6567
Obbligazionario	4	ICE BofAML Bond Indices Global High Yield Index USD	-1,9825
	5	ICE BofAML Bond Indices Global Government Bond II Index USD	-2,4259
	6	as of higher risk class	as of higher risk class
	7	as of higher risk class	as of higher risk class

¹⁵ si tenga conto che non sempre per i CERTIFICATES la BANCA traccia in modo puntuale ed univoco i sottostanti, che possono essere anche di composizione varia e non univocamente specificata, da qui la categoria Altro come complementare a puri CERTIFICATES Obbligazionari ed Azionari.

CLASS	ISR	INDEX NAME	INDEX DEUS ID	VAR	NOTE
OBBLIGAZIONI	1	FBE EURIBOR 6M 360 EUR	ACD4004E22C09C70D9C0	-0,0588	unico indice obbl. titolato
	2	ICE BoFAML Bond Indices 0-1 Year Euro Government Index LCL	AC0100089F48B342515C	-0,101	
	3	ICE BoFAML Bond Indices 0-3 Year Euro Government Index LCL	AC6400314B1FE660DD4C	-0,4389	
	4	ICE BoFAML Bond Indices 1-5 Year Euro Government Index LCL	ACD4004E1CFD3E2019C0	-0,9459	
	5	ICE BoFAML Bond Indices Global High Yield Index USD	AC010008CF0FE6A2179C	-1,9825	
	6	ICE BoFAML 15+ Yrs AA Rated EMU Direct Governments LCL	AC0F004EDF07B9077B0C	-5,5508	
	7	STOXX Indices NR EURO STOXX 50 Daily Leverage 3 Total Return EUR	AC6400282C2BB0FFE15C	-16,0051	
ALTRO	1	FBE EURIBOR 6M 360 EUR	ACD4004E22C09C70D9C0	-0,0588	
	2	ICE BoFAML Bond Indices 0-1 Year Euro Government Index LCL	AC0100089F48B342515C	-0,101	
	3	ICE BoFAML Bond Indices 1-3 Year Euro Government Index LCL	ACD4004E1D076E9F62C0	-0,6036	
	4	ICE BoFAML Bond Indices 3-5 Year Euro Government Index LCL	ACD4004E1D00A20197C0	-1,3351	
	5	MSCI The World Index USD	ACD4004E2514D4B0DB0C0	-4,3708	
	6	MSCI EM (Emerging Markets) USD	ACD4004E24EEF967CCC0	-5,0736	
	7	STOXX Indices NR EURO STOXX 50 Daily Leverage 3 Total Return EUR	AC6400282C2BB0FFE15C	-16,0051	
AZIONI	1	FBE EURIBOR 6M 360 EUR	ACD4004E22C09C70D9C0	-0,0588	ISR 7 INDICE estremale.
	2	ICE BoFAML Bond Indices 0-1 Year Euro Government Index LCL	AC0100089F48B342515C	-0,101	
	3	ICE BoFAML Bond Indices Investment Grade Local Currency LCL	AC21001A3D7EEEC3288C	-0,6567	
	4	ICE BoFAML Bond Indices Euro High Yield Index LCL	ACD4004E1CF3B47D5C0	-1,7273	
	5	MSCI The World Index USD	ACD4004E2514D4B0DB0C0	-4,3708	
	6	Nasdaq Indices NASDAQ 100 USD	ACD4004E1C79AF2E03C0	-6,4072	
	7	STOXX Indices NR EURO STOXX 50 Daily Leverage 3 Total Return EUR	AC6400282C2BB0FFE15C	-16,0051	

Tabella 2: Esemplicativo di una simulazione, su un insieme di 150 indici. Tabella riassuntiva degli INDICI di approssimazione (Proxy) dei CERTIFICATES differenziati per classi di sottostante e ISR (Rating). Si noti che l'indice individuato per ISR 6 del comparto obbligazionario è l'unico disponibile all'interno della classe assegnata con rischiosità $R=ISR=6$.

3.3 Correlazione

Per il comparto *Obbligazionario* (ed anche per gli altri comparti, ma si è riportato quello *Obbligazionario* in modo esemplificativo¹⁶) si è calcolata la correlazione tra INDICI di diversi Rating R_i , al fine di verificare che tra Rating (distanti) la correlazione fosse bassa (minore) rispetto ai Rating più vicini e che comunque il salto della classe di Rating oltre che un VAR differente (esponenzialmente differente) implicasse anche correlazione bassa.

¹⁶ si sfrutta qui il vantaggio di avere "pochi" gruppi di CERTIFICATES, con una suddivisione troppo ampia delle categorie in particolare della categoria Altro possono emergere questioni di correlazione alta tra indici di ISR diverso e classi diverse, il che non è indicato.

Tabella 3: Tabella riassuntiva degli INDICI di approssimazione (Proxy) dei CERTIFICATES differenziati per classi di sottostante e Indicatore Sintetico di Rischio ISR .

R		1	2	3	4	5	6	7
IsR	Name	FBE EURIBOR 6M 360 EUR	ICE BofAML Bond Indices 0-1 Year Euro Government Index LCL	ICE BofAML Bond Indices 0-3 Year Euro Government Index LCL	ICE BofAML Bond Indices 1-5 Year Euro Government Index LCL	ICE BofAML Bond Indices Global High Yield Index USD	ICE BofAML 15+ Yrs AA Rated EMU Direct Governments LCL	STOXX Indices NR EURO STOXX 50 Daily Leverage 3 Total Return EUR
1	FBE EURIBOR 6M 360 EUR	1	0,494	0,0944	0,0414	0,0014	0,0191	-0,0029
2	ICE BofAML Bond Indices 0-1 Year Euro Government Index LCL	0,494	1	0,7749	0,6745	0,0161	0,3939	-0,109
3	ICE BofAML Bond Indices 0-3 Year Euro Government Index LCL	0,0944	0,7749	1	0,9828	0,1343	0,7121	-0,0249
4	ICE BofAML Bond Indices 1-5 Year Euro Government Index LCL	0,0414	0,6745	0,9828	1	0,1734	0,7925	0,0195
5	ICE BofAML Bond Indices Global High Yield Index USD	0,0014	0,0161	0,1343	0,1734	1	0,1689	0,1772
6	ICE BofAML 15+ Yrs AA Rated EMU Direct Governments LCL	0,0191	0,3939	0,7121	0,7925	0,1689	1	0,1532
7	STOXX Indices NR EURO STOXX 50 Daily Leverage 3 Total Return EUR	-0,0029	-0,109	-0,0249	0,0195	0,1772	0,1532	1

E' stato anche verificato che all'interno della classe di Rating¹⁷ la correlazione tra INDICI dello spazio di scelta Ω fosse alta. Uno stralcio dei dettagli in tabella 3 per gli indici del comparto Obbligazionario¹⁸.

¹⁷ Rating ed ISR dei CERTIFICATES sono sinonimi. ¹⁸ le analisi di correlazione sono riservate ad altra *Documentazione* qui si vuole presentare la logica generale. Esula dal presente lavoro ma la forma funzionale 2 a pagina 6 ed uno spazioni di INDICI ampio, garantisce una indipendenza tra classi di ISR . Uno studio della correlazione su base fenomenologica ovvero sui dati sembra essere senz'altro necessaria allorché si applichi il modello qui descritto e se ne individuino gli INDICI di approssimazione, mentre sul piano puramente teorico-matematico uno studio a priori della correlazione tra INDICI di diverso ISR , si risolve sostanzialmente allorché equazione 2 a pagina 6 fornendo una scala esponenziale tra un ISR ed il successivo in termini di VAR , ne implica (sul piano generale appunto) la indipendenza.

A Dettagli Matematici del modello sviluppato.

A.1 Analisi approfondita in merito al minimo del VaR .

Dall'equazione 2 a pagina 6 si evince che la relazione $R = R(v)$ è ad un parametro A , ovvero della forma $R = R_A(v)$ in cui si esprime un indicatore sintetico di rischio R per un INDICE come funzione del VAR (v) dell'INDICE stesso.

Il parametro A ¹⁹ lo si deduce come sopra descritto dalla 2 a pagina 6 quando si pone²⁰ $R = 1$ e si ottiene quindi:

$$R = R_A(|v|) = \ln_e \frac{|v|}{A}, A \neq 0, A > 0, \text{ quindi } \frac{|v|}{A} > 0 \quad (5)$$

$$e^R = e^{\ln_e \frac{|v|}{A}} = \frac{|v|}{A} \quad (6)$$

$$e^1 = e = \frac{|v|_{min}}{A} \quad (7)$$

$$A = \frac{|v|_{min}}{e} \quad (8)$$

dove si è assunto²¹ che $R \sim 1$ per $|v| = |v|_{min}$. Risulta pertanto come anticipato sopra la interpretazione del parametro $A = \frac{1}{e} \times |v|_{min}$ interpretabile come quante volte $|v|_{min}$ sta in e ²² Il valore di $|v|_{min}$ è tuttavia anch'esso da modellizzare in quanto sebbene in prima istanza possa essere preso come il singolo valore minimo del VAR $|v|$ nello spazio degli INDICI ($|v|_{min} = \min_{\psi} |v|_{\psi}, \psi \in \Omega$) tale rappresentazione di $|v|_{min}$ (ovvero di A) sarebbe soggetta al valore di oggi di $|v|_{\psi}$ ovvero si avrebbe $A = A(t)$ in quanto $|v|_{min} = v_{min}(t)$.

Si è pertanto deciso di raccogliere una breve serie storica di valori del VAR degli INDICI in Ω e di effettuare una media al fine di identificare un valore del parametro A più indipendente possibile da oscillazioni temporali. Per la trattazione completa si veda il paragrafo in appendice A. Qui si riportano i risultati notando che i valori inizialmente considerati per A sono stati dedotti nel range 2 ‰2 , ‰ in quanto il VAR del money market Euribor ad 1 mese era $|v| \sim 0.05$ (ricordando che $A = \frac{v}{e}$), essendo questo indice nella simulazione effettuata quello rappresentativo della classe $R = 1$. Il valore di var_{min} stimato (riferimenti al paragrafo A.2 nella pagina successiva) è stato pari a

¹⁹ si possono ipotizzare forme funzionali più articolate a 2, 3,.. parametri ad esempio $R = R_A(v) + B$, laddove però non cambia la assunzione di una dipendenza esponenziale di R da v e dove l'esistenza di un singolo parametro A rende ne rende più immediata la interpretazione sui dati.

Se infatti si utilizzano ad esempio 2 parametri pertanto nella forma $R = R_{A,\alpha}(v)$ andrebbero poi ovviamente formulate due condizioni (e non più una) eventualmente a sistema tra loro e si potrebbe perdere la immediata interpretazione fenomenologica del parametro A .²⁰ più avanti si approfondisce questa scelta metodologica.²¹ esula dalla presente trattazione, tuttavia medesimo approccio si può applicare imponendo $R = 2$ o $R = 3, \dots R = 7$. Ad esempio inserendo in5 $R = 7$ si avrebbe che il parametro A è specificato da $|v|_{max}$ invece che da $|v|_{min}$ e si avrebbe pertanto $A = \frac{v_{max}}{e^7}$. Dai dati investigati si vede che, a conferma della robustezza del modello $\frac{v_{min}}{e^1} \sim \frac{v_{max}}{e^7} \sim 2 \times 10^{-2}$.²² anche se oggetto di una trattazione più avanzata la relazione $|v| = A \times e^R$ de facto introduce il parametro A come VAR in unità di e .

$$|v|_{min} = |0.0569| \quad (9)$$

$$A = \frac{v_{min}}{e} = 0.02 \quad (10)$$

$$\langle |v|_{min} \rangle_t = |0.03| \quad (11)$$

$$\langle A \rangle_t = \frac{v_{min}}{e} = 0.012 \quad (12)$$

dove l'espressione $\langle A \rangle_t$ rappresenta la media²³ ovvero la miglior stima del parametro A sulla base delle considerazioni della presente sezione e della sezione A.2.

A.2 Ulteriori considerazioni sul calcolo di A (valore minimo di $|v|$)

Come introdotto al paragrafo 3 a pagina 4 si è proceduto a valutare come eliminare²⁴ (o minimizzare) la dipendenza temporale del parametro A , presente in quanto $A = |v|_{min}$ andando a effettuare diverse misurazioni temporali di $|v|_{min}$ (che qui chiamiamo v_m per comodità), ovvero $v_{m,1} = \min_{\Omega}(t_1)(v)$, $v_{m,2} = \min_{\Omega}(t_2)(v)$, $v_{m,3} = \min_{\Omega}(t_3)(v)$ dove t_1 è oggi, $t_2 = t_1 - 6$ mesi e $t_3 = t_1 - 12$ mesi e $t_4 = t_1 - 18$ mesi.

Si noti che $\Omega(t) \sim \Omega(t')$ per $t \neq t'$ in quanto anche se si selezionano gli stessi INDICI, spostando la finestra temporale qualche INDICE potrebbe non avere una serie storica di dati sufficiente per il calcolo del VAR sull'orizzonte temporale richiesto (3 anni)²⁵, tuttavia si è proceduto a selezionare INDICI con adeguata profondità.

I 4 valori di v_m calcolati sono stati utilizzati per ottenere un valore medio \bar{v}_m e di conseguenza un $\langle A \rangle = \bar{v}_m e$.

Si noti che l' $\langle A \rangle$ così ottenuto ha "perso" la dipendenza temporale (in quanto media temporale) e per comodità lo si indicherà con $A = \langle A \rangle_t = \langle A \rangle$ ovvero valore medio sulla successione temporale dei valori minimi t_i prescelta ($t_i = t_1, t_2, t_3, t_4$ nella analisi effettuata).

Questa trattazione è stata presentata in modo completo e dettagliato in quanto sono possibili raffinamenti ed ipotesi alternative, per l'identificazione del (o dei) parametri da inserire nella forma funzionale $|v| = e^R$.

Va sottolineato che sebbene $\langle A \rangle$ possa essere inteso come mediato sul tempo, in realtà una trattazione rigorosa mostrerebbe che $\dot{A} \neq 0$ pertanto il modello necessita di una ri-calibrazione su base temporale (annuale ad esempio)²⁶.

Infatti da $\dot{A} \neq 0$, discende subito che essendo $R = \ln \frac{v}{A}$ allora $\dot{R} \neq 0$ ovvero nel tempo, a parità di VAR, il Rating R (IsR) assegnato ad un determinato

²³ su 4 date di riferimento: *Settembre 2023, Marzo 2023, Settembre 2022 e Marzo 2022*. il minimo del VAR è aumentato in valore assoluto nell'ultimo semestre. ²⁴ i dati della presente *Documentazione* contengono il |VAR| ²⁵ al di fuori della trattazione presente, tuttavia si noti che Ω_t ed $\Omega_{t-1}, \Omega_{t-2} \dots$ sono osservazioni di Ω su finestre temporali differenti, pertanto in modo non rigoroso si può comunque assumere $\Omega_t \sim \Omega_{t-1} \sim \Omega_{t-2} \sim \dots$ avendo cura di scegliere uno spazio degli INDICI con adeguata profondità temporale. Per questo motivo sono stati esclusi del tutto INDICI che hanno prof. temporale inferiore ai 3 anni ad oggi. Anche se al di fuori della presente analisi, si osservi che la scelta di Ω è rilevante per questo tipo di analisi ed in genere più ampio è Ω e più è raffinata la scelta degli INDICI di approssimazione. ²⁶ Si consideri la notazione \dot{f} come la derivata della funzione $f = f(t)$ rispetto al tempo t ovvero $\dot{f} = \frac{df}{dt}$.

INDICE potrebbe cambiare.

$$\begin{aligned} R &= \ln \frac{|v|}{A} \\ \dot{R} &= \frac{1}{\frac{|v|}{A}} \times (-|v|) \frac{\dot{A}}{2A^2} \\ &= -|v| \frac{A}{|v|} \frac{\dot{A}}{2A^2} \\ &= -\frac{1}{2} \frac{\dot{A}}{A} \end{aligned}$$

pertanto se $\dot{A} \neq 0$ deriva che $\dot{R} \neq 0$ ²⁷ ed in particolare si vede subito che per sensibili variazioni di $|v|_{min}$ e valori “piccoli” di $|v|_{min}$ si ha una maggiore variazione di R ovvero una maggiore probabilità che un INDICE possa cambiare R²⁸ (una trattazione completa considererebbe anche \dot{v} ma esula dalla presente *Documentazione*).

A.3 Elementi avanzati sul $|v|_{min}$

Si consideri qui che v e $|v|$ sono usati intercambiabilmente per comodità ricordando che $\text{VAR} < 0$. Si esplicita il calcolo in cui si evidenzia la dipendenza temporale della associazione $R = \ln \frac{v}{A}$ dal tempo, ovvero

$$R(t) = \ln \frac{v(t)}{A(t)} \quad (13)$$

Discendono i seguenti passaggi:

$$\begin{aligned} \dot{R} &= \frac{1}{\frac{v}{A}} \times \frac{A\dot{v} - v\dot{A}}{A^2} \\ &= -\frac{A}{v} \frac{\dot{A}(v - A)}{A^2} \\ &\sim -\frac{\dot{A}}{A} \end{aligned}$$

in cui si è usata la approssimazione $\dot{A} = \dot{v}$ (si può ipotizzare in prima approssimazione che $A = |v|_{min}$ e $v(t)$ abbiano la stessa derivata rispetto al tempo t in quanto sono sempre un VAR derivato rispetto al tempo) e siccome A è “piccolo” rispetto a v (ricordiamo che A esprime un minimo del valore assoluto del VAR) $v(t) - A \sim v(t)$. Si vede dal risultato (simile a quanto ottenuto nella approssimazione sopra esposta in cui si otteneva $\dot{R} = -\frac{\dot{A}}{2A}$ in linea con il fatto che se si considera anche la variazione di v nel tempo la variazione corrispondente di R aumenta) che $dR = -\frac{\dot{A}}{A} dt$ pertanto vale

$$dR = -\frac{1}{A} dA \quad (14)$$

²⁷ Se la derivata rispetto al tempo di A si assume essere diversa da 0, così sarà per la derivata rispetto al tempo di R .²⁸ Si interpreti così il risultato se al tempo t un INDICE ha Rating R, al tempo $t' > t$ avrà Rating R' e se il $|v|_{min}$ sarà aumentato, significa che (tenendo fisso v) R sarà migliorato (infatti l'INDICE avrà mantenuto il suo VAR ma la classe 1 sarà più ampia e così le seguenti).

pertanto integrando in dA (per rispondere alla domanda: di quanto varia R , al variare di A)

$$R' - R = \int dR = \int -\frac{1}{A} dA = -(\ln(A') - \ln(A)) \quad (15)$$

in sostanza R migliora di una classe, se il $|v|_{min}$ aumenta di un fattore e proprio come ci si aspettava.

Questo si interpreta se prima un INDICE ad esempio era corrispondente alla classe 4, aumentando il $|v|_{min}$ quell'INDICE andrà a coprire la classe 3 che è divenuta infatti più rischiosa.

Il calcolo serve a confermare che, per una associazione rigorosa del Rating (ISR) all'INDICE una ricalibrazione in caso vari sensibilmente il VAR dell'INDICE di ISR - Rating 1 è consigliabile.

B Introduzione alla teorie perturbative del termine principale.

La versione del modello come in equazione 2 a pagina 6 si presta ad una serie di correzioni & tuning che di seguito sono introdotte. In particolare mentre $v = Ae^R$ rappresenta la forma funzionale base di associazione di un ISR ad ogni INDICE via il suo VAR, tale associazione può risultare essere associata ad esigenze della BANCA in termini di vincoli parametrici o di termini correttivi. Di seguito vengono esposti due ambiti (ne esistono altri) il primo è l'aggiunta di un termine sigmoidiale alla relazione base che va a correggere la valutazione di R in ottica migliorativa.

Il secondo ambito propone invece una relazione a 2 parametri del tipo $v = A \times e^{\alpha R}$ laddove la BANCA voglia vincolare la scala di riferimento a valori noti di portafoglio. Per questa seconda casistica viene esplicitato come si deducono i parametri α ed A dai vincoli della forma (R_a, v_a) e (R_b, v_b) .

B.1 Modello con termine sigmoidiale.

Il modello descritto in equazione 2 a pagina 6 può essere immaginato estendibile andando a variare $R = R(v)$ se esistono condizioni migliorative (o peggiorative) quali ad esempio, presenza di coperture, correlazioni con altre metriche quali la deviazione standard σ , o se si desidera includere un fattore che trasli i valori di R verso valori di VAR più alti o più bassi.

Questa esigenza va compresa alla luce della forma funzionale esponenziale ad 1 parametro di equazione 2 a pagina 6, ovvero $|v| = A \times e^R$ che rappresenta il *core* del modello ma che può richiedere una integrazione peraltro dovuta alla fenomenologia (dati disponibili) sottostanti.

In altri termini $R = R_A(v)$ può richiedere che il valore finale di ISR dell'indice di var vm possa (per alcuni valori di R) essere fenomenologicamente integrato²⁹ In generale immaginando sul piano formale che $R = R(v) \pm \delta$ dove δ rappresenta la

²⁹ Senza entrare nei dettagli il modello di scala esponenziale prevede una infinita granularità degli indici, ovvero che esista un alto (infinito!) numero di indici che quasi-continuo corrispondano ai possibili valori di VAR. In realtà ogni BANCA ha un sottoinsieme di INDICI e di strumenti finanziario numericamente limitato pertanto per alcuni valori di ISR l'equazione 2 a pagina 6 richiede appunto un eventuale termine aggiuntivo per corrispondere in modo ideale ai dati disponibili.

variazione in funzione degli elementi quali appunto σ , hedge...³⁰ rispetto alla relazione 2 a pagina 6 si propone pertanto una versione leggermente estesa della forma funzionale di $R = R(v)$ che tenga in considerazione³¹ anche un elemento del tipo $-\frac{1}{1+e^{-\alpha x}}$ che porta³² pertanto la forma funzionale a:

$$R = \ln \frac{v}{A} - \frac{1}{1 + e^{-\alpha|x-x_0|}} \quad (16)$$

dove x rappresenta una variabile quale il grado di copertura, la deviazione standard, l'andamento del sottostante se noto...oppure il VAR stesso, con un peso specifico α per il cui significato si veda nel seguente paragrafo B.1.1.

B.1.1 Funzione sigmoideale teoria generale

Con funzione di tipo sigmoideale si intende una funzione s della variabile x , pertanto $s = s(x)$ a 2 parametri λ ed x_0 del tipo

$$s(x)_{\lambda, x_0} = \frac{1}{1 + e^{-\lambda(x-x_0)}} \quad (17)$$

le cui proprietà principali sono di tendere ad 1 per $x \rightarrow \infty$ ed a 0 per $x \leftarrow -\infty$. $s(x)$ è pertanto compresa nell'intervallo aperto $(0, 1)$, ha un flesso in $x = x_0$ e la pendenza in questo punto pari a $\frac{\lambda}{4}$. Il parametro λ viene detto fattore di crescita ed il termine x_0 rappresenta il centro della funzione (dove $s(x)$ cambia convessità). In particolare la funzione 17 è soluzione dell'equazione differenziale:

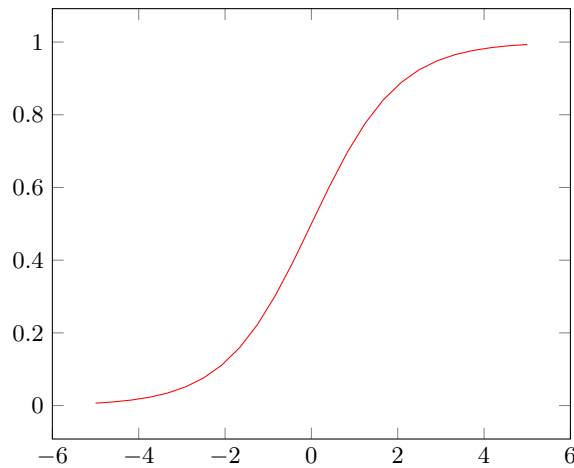
$$\frac{dF}{dx} = c(F(x) - A)(B - F(x)) \quad (18)$$

detta equazione logistica o equazione della crescita con $c > 0, A > 0, B > 0$ e la cui soluzione generale è:

$$F(x) = \frac{BDe^{\frac{cx}{c}} + A}{De^{\frac{cx}{c}} + 1} \quad (19)$$

dalla quale si ottiene la funzione $s(x)$ in equazione 17 per $A = 0, B = 1$. L'equazione 18 (si veda [7]) descrive un processo di crescita/decrecita limitata (è detta anche equazione della crescita) dai *valori limite* A e B (in particolare 0 ed 1 nella forma della soluzione 17).

³⁰ Sul piano più astratto se $R = R(v)$ è la misura sullo spazio degli INDICI isomorfa alla misura sullo spazio dei CERTIFICATES , tale misura può essere estesa ad una metrica che includa appunto effetti di copertura, effetti legati alla deviazione standard e/o effetti devianti rispetto alla sola funzione esponenziale mantenendo l'isomorfismo, laddove si assuma che le metriche di rischio espresse dalla relazione $R = R(v)$ siano valide anche per l'insieme dei CERTIFICATES denotato in termini generali con C . E' questo il caso ad esempio di metriche legate al sottostante, cui verrà dedicata una *Documentazione* specifica. Medesimo argomento si utilizza quando si pensa ad una metrica parametrica, in cui i valori di VAR del portafoglio BANCA , fissano i parametri della metrica stessa come accade precisamente nella presente trattazione a partire dalla relazione 2 a pagina 6. ³¹ si legga la didascalia e la nota in tabella 2 a pagina 8. ³² per le proprietà della funzione sigmoideale ed il suo diffusissimo uso in un ampio spettro di applicazioni si veda ad esempio [4].



Nel contesto della presente analisi, l'utilizzo della funzione sigmoideale del tipo in 17 nella pagina precedente permette di correggere il valore di R dato un certo valore di VAR v agendo sulla forma funzionale $R = R(v)$ aggiungendo un termine alla relazione base $v = Ae^R$ che invertita porta a $R = \ln \frac{|v|}{A}$. Il termine risulta appunto derivato dalla la funzione $s(x)$ in 17 nella pagina precedente. Quanto discusso viene facilmente applicato laddove esista la casistica in cui gli INDICI disponibili presso la BANCA evidenziassero un profilo di rischio (valori di VAR) eventualmente per alcuni valori di ISR migliorativi rispetto ai valori di portafoglio BANCA . Si presenta qui un caso pratico in cui il modello base di equazione 2 a pagina 6 viene integrato dal termine sigmoideale, con la proprietà di avere una influenza per i valori iniziali della scala di ISR (1,2,3,4) ed invece una sempre minore influenza sui valori alti di ISR (5,6,7). Questa esigenza emerge fenomenologicamente.

B.2 Modello a 2 parametri e soluzione vincolata

L'equazione 1 a pagina 6 $|v| = Ae^R$ ha la possibilità di una generalizzazione ed estensione a 2 parametri per poter intercettare peculiarità di portafoglio/tuning e /o valori fenomenologici (esempio la BANCA ha un portafoglio di strumenti finanziari con valori di VAR medio di riferimento per alcuni valori di ISR). L'estensione agisce sulla *pendenza* della curva e si esplicita pertanto nella forma funzionale generale a due parametri (α, A) :

$$|v| = Ae^{\alpha R} \quad (20)$$

Tale forma funzionale, con la convenzione di indicare con v il valore assoluto del VAR così da avere una notazione più snella permette di determinare il valore di α ed A a partire da due punti della forma (R, v) generali. Indicando con $\mathbf{x} = (R_x, v_x)$ ed $\mathbf{y} = (R_y, v_y)$ i due punti e risolvendo l'equazione 20 nelle incognite α ed A si ottengono i valori degli stessi come funzione dei due punti \mathbf{x} ed \mathbf{y} assunti. Nella rappresentazione a due parametri rimangono valide tutte le considerazioni effettuate e si inserisce in aggiunta una articolazione del termine esponenziale (invece di $R, \alpha R$) che si vede subito può essere compresso nella forma originaria con la sostituzione $R_\alpha = R\alpha$ e quindi $v = Ae^{R_\alpha}$ che è proprio l'equazione 1 a pagina 6. Va detto che lo studio di \dot{v} e quindi di \dot{R} e \dot{A} , sebbene non cambi nella sostanza con

l'introduzione di α fa emergere la dipendenza dai punti \mathbf{x} ed \mathbf{y} ai quali è dedicato un articolo specifico di carattere sia teorico che fenomenologico. Nel caso di due punti $\mathbf{x} = (v_x, R_x)$ e $\mathbf{y} = (v_y, R_y)$ è possibile comunque esplicitare α ed A risolvendo il sistema di 2 equazioni in due incognite. Tale trattazione si rende rilevante quando la BANCA propone un proprio portafoglio con valori benchmark di VAR e quindi i parametri nella relazione 20 nella pagina precedente risultano da tali vincoli definiti. Si fornisce di seguito la parte matematica alla sezione B.2.1, mentre si rimanda ad altra *Documentazione* per la trattazione fenomenologica.

B.2.1 Soluzione per i parametri A ed α .

La relazione:

$$v = Ae^{\alpha R}, \quad v, R, A, \alpha > 0 \quad (21)$$

permette di identificare univocamente α ed A laddove si fissino due punti $P_a = (R_a, v_a)$ e $P_b = (R_b, v_b)$ per i quali la curva 21 si vincola a passare. P_a e P_b sono pertanto valori a priori (esempio portafoglio benchmark della BANCA) che si considerano significativi e di riferimento per la associazione dell'ISR agli INDICI . Ad esempio si desidera che la scala di VAR inizi da un valore (R_1, v_1) e termini con un valore R_7, v_7 allora ogni INDICE avrà un ISR R calcolato secondo 21 tenendo conto tali vincoli. Questa tipologia di condizioni, al contorno, per la classificazione degli INDICI nel perimetro la scelta stessa laddove nell'esempio INDICI con VAR $v \ll v_1$ verrebbero esclusi dal perimetro di analisi (dall'insieme degli INDICI per i quali l'assegnazione dell'ISR è significativa), in quanto avrebbero $R < 1$ il che non è possibile per definizione. Si consideri quindi il sistema seguente in cui propriamente si impone il passaggio di $v = Ae^{\alpha R}$ in P_a e P_b e con la convenzione $R_b > R_a$ ($b > a$) e quindi $R_b - R_a \neq 0$

$$\begin{cases} v_a = Ae^{\alpha R_a} \\ v_b = Ae^{\alpha R_b} \end{cases} \quad (22)$$

Si deduce pertanto A in funzione di α , v_a, R_a (o similmente di α e v_b, R_b) scegliendo per esempio $v_a = Ae^{\alpha R_a}$

$$\begin{cases} A = v_a e^{-\alpha R_a} \\ v_b = v_a e^{\alpha(R_b - R_a)} \end{cases} \quad (23)$$

da cui discende:

$$\begin{cases} A = v_a e^{-\alpha R_a} \\ \frac{v_b}{v_a} = e^{\alpha(R_b - R_a)} \end{cases} \quad (24)$$

da cui segue:

$$\begin{cases} A = v_a e^{-\alpha R_a} \\ \ln \frac{v_b}{v_a} = \alpha(R_b - R_a) \end{cases} \quad (25)$$

da cui discende:

$$\begin{cases} A = v_a e^{-\alpha R_a} \\ \alpha = \frac{1}{R_b - R_a} \ln\left(\frac{v_b}{v_a}\right) \end{cases} \quad (26)$$

stat.	ISR 1	ISR 2	ISR 3	ISR 4	ISR 5	ISR 6	ISR 7
media	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7
VAR							

Tabella 4: Template logico per la tabella di riferimento, per identificare i punti relativi P_a e P_b della forma (ISR, v). Esempio: $P_a = (1, v_1)$; $P_b = (6, v_6)$.

che esplicita pertanto α in termini di P_a e P_b come anticipato. Anche per A si può ottenere la esplicita dipendenza dai 2 punti P_a e P_b pervenendo quindi a:

$$\begin{cases} A = v_a e^{-\alpha R_a} = v_b e^{-\alpha R_b} \\ A = v_a \left(\frac{v_b}{v_a}\right)^{-\frac{R_a}{R_b - R_a}} \\ \alpha = \frac{1}{R_b - R_a} \ln\left(\frac{v_b}{v_a}\right) \end{cases} \quad (27)$$

che quindi si usano in equazione:

$$R = \frac{1}{\alpha} \ln \frac{|v|}{A} \quad (28)$$

per associare un ISR ad ogni INDICE. Si vede quindi che effettivamente A ed α risulteranno espressi in funzione dei vincoli risultando quindi come nella relazione 27: $A = A(P_a, P_b)$ e $\alpha = \alpha(P_a, P_b)$. Queste relazioni sono quindi fornite dalla aggiuntiva condizione al contorno laddove invece di esprimere A come rappresentato in sezione A.2 a pagina 11 si decida di procedere per valori fenomenologici pre-definiti con 2 parametri α ed A .

C Arrotondamento di R

il valore di R come in equazione 2 a pagina 6, ovvero $\ln \frac{|v|}{A}$ rappresenta ab origine un valore numerico decimale, tanto che la notazione completa sarebbe $R_{dec} = \ln \frac{|v|}{A}$ e conseguentemente $R = \text{arrotondamento intero}(R_{dec})$, sintetizzata come appunto in equazione 2 a pagina 6. L'arrotondamento di R al valore intero secondo l'usuale

$$|R - R_{dec}| < 0.5 \quad (29)$$

$$R_{dec} = \ln \frac{|v|}{A} \quad (30)$$

porta conseguentemente alla seguente tabella:

R	Range di $\ln \frac{ v }{A}$	Range di VAR
1	$(-\infty, 1.5)$	$(Ae^{-\infty}, Ae^{1.5})$
2	$[1.5, 2.5)$	$[Ae^{1.5}, Ae^{2.5})$
3	$[2.5, 3.5)$	$[Ae^{2.5}, Ae^{3.5})$
4	$[3.5, 4.5)$	$[Ae^{3.5}, Ae^{4.5})$
5	$[4.5, 5.5)$	$[Ae^{4.5}, Ae^{5.5})$
6	$[5.5, 6.5)$	$[Ae^{5.5}, Ae^{6.5})$
7	$[6.5, +\infty)$	$[Ae^{6.5}, Ae^{+\infty})$

D Logiche di individuazione degli indici.

D.1 introduzione

La tabella in 2 a pagina 8 riportata nella presente *Documentazione*, rappresenta (quale risultato finale) l'avvenuta scelta dell'INDICE (per la combinazione classe, ISR) da utilizzare come proxy. In realtà all'interno di ogni classe di sottostante del CERTIFICATES (Obbligazione, Azione, Altro) per un valore di ISR, esistono in generale più indici (in dominio alla BANCA), che potrebbero essere scelti come proxy rappresentante la classe di rischio. La tabella 2 a pagina 8 ottenuta dalla analisi di dettaglio di tutti gli indici disponibili, per i valori di ISR, per ogni classe di CERTIFICATES è tuttavia ottenibile in modo automatico, come raffinamento successivo della scelta degli INDICI disponibili, secondo alcuni criteri³³ che vengono di seguito esposti.

D.2 Logiche di raffinamento.

1. Associazione all'INDICE del valore (decimale) di ISR, ovvero R secondo l'equazione 2 a pagina 6
2. Arrotondamento di R al valore intero (si veda C nella pagina precedente).
3. All'interno della classe di ISR, identificazione dell'INDICE Obbligazionario, con la condizione che VAR INDICE rispetti la condizione di ordinamento, secondo cui il VAR dell'INDICE azionario precedente è minore del VAR dell'INDICE prescelto. Ad esempio, il VAR dell'INDICE Obbligazionario prescelto per la classe di ISR 4, dovrà essere superiore al VAR dell'INDICE azionario prescelto per la classe di ISR 3 ed al VAR dell'INDICE "altro" prescelto per la classe di ISR 3 (ed ovviamente dell'INDICE scelto per ISR 3 obbligazionario).
4. per le obbligazioni vengono prescelti indici BofA (Bank of America) ed MSCI

D.3 Esempio di scelta per raffinamento degli indici di IsR 4.

A titolo esemplificativo di quanto esposto in appendice D, per maggiore chiarezza si indica come sono stati individuati gli INDICI di ISR 4 in tabella 2 a pagina 8 per i 3 comparti Obbligazioni, Altro ed Azioni, notando che la logica è medesima per tutti gli ISR.

³³ anche indicati come filtri o step logici di raffinamento o semplicemente step logici.

esempio di scelta INDICI per raffinamento					
identificazione indici IsR 4					
(1) INDICI	(3) VAR	(4) T	(5) R decimale	(6) R intero	(7) note
ICE BofAML Bond Indices EMU Corporates 1-5 Yrs LCL	-0,9271	OBBL.	3,84	4	scelto (obbl)
ICE BofAML Bond Indices 1-5 Year Euro Government Index LCL	-0,9459	OBBL.	3,86	4	
ICE BofAML Bond Indices 1-5 Year Italy Government Index LCL	-1,0616	OBBL.	3,97	4	
ICE BofAML Bond Indices 3-5 Yrs EMU Corporates LCL	-1,2922	OBBL.	4,17	4	
ICE BofAML Bond Indices 3-5 Yrs BBB Rated EMU Corporates LCL	-1,2992	OBBL.	4,17	4	
Fideuram Fondi Obbligazionari EUR	-1,2998	ALTRO	4,17	4	
ICE BofAML Bond Indices 3-5 Year Euro Government Index LCL	-1,3351	OBBL.	4,20	4	scelto (altro)
Average Index of "Fondi Hedge"	-1,3973	ALTRO	4,25	4	
Average Index of "Bond Europe"	-1,4528	OBBL.	4,29	4	
Fideuram Obbligazionari Euro Corporate Investment Grade EUR	-1,5493	ALTRO	4,35	4	
Average Index of "Obbligazionari euro high yield"	-1,5560	OBBL.	4,35	4	
ICE BofAML Bond Indices 3-5 Year Italy Government Index LCL	-1,5562	OBBL.	4,35	4	
ICE BofAML Bond Indices EMU Corporate LCL	-1,6424	OBBL.	4,41	4	
ICE BofAML Bond Indices BofA Merrill Lynch EMU Corporate EUR	-1,6424	OBBL.	4,41	4	
Fideuram Bilanciati Obbligazionari EUR	-1,7212	ALTRO	4,46	4	
ICE BofAML Bond Indices Euro High Yield Index LCL	-1,7273	OBBL.	4,46	4	scelto (azioni)
Average Index of Obbligazionari dollaro high yield	-1,7506	OBBL.	4,47	4	

Tabella 5: Rappresentazione operativa della logica di scelta degli INDICI in tabella 2 a pagina 8 per $IsR = 4$. L'INDICE obbligazionario $IsR = 4$ è stato scelto perché: il suo VAR è maggiore in valore assoluto del VAR $IsR = 3$ azionario ($v_{3, \text{azionario}} = -0,6567$), inoltre è di tipo Bank of America, inoltre è Obbligazionario, inoltre è alla frontiera (positiva) di $IsR = 4$. Tutte queste condizioni riescono univocamente ad identificare ICE BofAML Bond Indices EMU Corporates 1-5 Yrs LCL come scelta univoca automatica di attribuzione dell'Indice. Si noti che gli INDICI azionari sono popolati a partire da $IsR = 5$.

Di seguito come il raffinamento ha proceduto per l'Identificazione dei 3 indici di $IsR = 4$, per i comparti obbligazioni, azioni, altro.

1. per ogni INDICE in dominio (per tutti gli INDICI in perimetro) si stima il valore del VAR v (weekly, calendar, 3 Y).
2. gli INDICI in dominio vengono ordinati per valore assoluto crescente di VAR.
3. l'equazione in 2 a pagina 6 si applica per stimare l' $IsR (R)$ decimale per ogni INDICE a partire dal VAR (colonna 5 in tabella 5).
4. R (decimale) viene arrotondato (si veda il paragrafo C a pagina 17)al valore intero ($R-IsR$), in colonna 6 in tabella 5.

-
5. si applica il raffinamento vero e proprio:
 - (a) per l'INDICE obbligazionario si recupera il VAR dell'INDICE di ISR 3 azionario (omologa tabella per ISR 3 è infatti precedentemente stata creata e li per l'INDICE ISR 3 azionari si identifica il VAR , nella presente simulazione pari a $v_{3,azionario} = -0,6567$).
 - (b) il VAR dell'INDICE prescelto dovrà soddisfare la condizione $v_{4,obbligazionario} > v_{3,azionario}$. Tutti gli indici in tabella 5 nella pagina precedente soddisfano questa condizione.
 - (c) si cercano gli indici BofA se esistono e tra questi gli indici di tipo BofA Bond (essendo obbligazioni).
 - (d) si seleziona l'INDICE (tra i sopra selezionati) che (essendo obbligazionario) sta alla frontiera dell'insieme, ovvero con VAR in valore assoluto minore.
 - (e) l'INDICE univocamente identificato è proprio *ICE BofAML Bond Indices EMU Corporates 1-5 Yrs LCL*.
 - (f) si passa al raffinamento per INDICE sul segmento Altro.
 6. si inizia la selezione dell'INDICE Altro
 - (a) il segmento Altro prevede la condizione di posizionarsi in posizione mediana tra Obbligazioni e Azioni, portandosi pertanto in posizione 8 - Average Index of "Fondi Hedge", tuttavia questo INDICE non è di tipo BofA.
 - (b) si cerca l'INDICE BofA più vicino iniziando da posizione ± 1 , in questo modo si identifica l'INDICE ICE BofAML Bond Indices 3-5 Year Euro Government Index LCL come candidato (in posizione -1, in quanto l'INDICE in posizione + 1 non è di tipo BofA),
 - (c) si verifica se appartiene al comparto Altro, tuttavia se la condizione non è soddisfatta l'INDICE viene accettato
 - (d) si seleziona l'INDICE e si passa all'identificazione INDICE azionario.
 7. si inizia la selezione dell'INDICE azionari
 - (a) ci si posiziona nella parte finale della tabella 5 nella pagina precedente. si nota che nel range di ISR 4 l'INDICE con VAR maggiore in valore assoluto è Average Index of Obbligazionari dollaro high yield (non rientra tra i BofA pertanto)
 - (b) si verifica se spostandosi di posizione ± 1 si individua un INDICE più appropriato (di tipo BOFA). Nell'esempio qui descritto in posizione -1 rispetto all'ultima posizione si trova ICE BofAML Bond Indices Euro High Yield Index LCL che è proprio l'INDICE prescelto.
 8. si consolidano i 3 indici identificati, in questo caso:
 - ICE BofAML Bond Indices EMU Corporates 1-5 Yrs LCL,
 - ICE BofAML Bond Indices 3-5 Year Euro Government Index LCL
 - ICE BofAML Bond Indices Euro High Yield Index LCL

IsR	SOTTOSTANTE	INDICE
4	OBBLIGAZIONI	ICE BofAML Bond Indices EMU Corporates 1-5 Yrs LCL
4	ALTRO	ICE BofAML Bond Indices 3-5 Year Euro Government Index LCL
4	AZIONI	ICE BofAML Bond Indices Euro High Yield Index LCL

Tabella 6: Tabella di Rappresentazione degli INDICI scelti dal processo automatico di raffinamento, a partire dalla tabella 5 a pagina 19 per IsR 4.

che pertanto compongono la tabella 6 che a sua volta confluisce in tabella 2 a pagina 8.

9. si procede con il medesimo processo di raffinamento per gli indici con IsR 5.

Riferimenti bibliografici

- [1] William Feller. An introduction to Probability Theory and its Application. Wiley, New York, 1968.
- [2] Michel Goossens, Frank Mittelbach, and Alexander Samarin. The L^AT_EX Companion. Addison-Wesley, Reading, Massachusetts, 1993.
- [3] John C. Hull. Options, Futures & other Derivatives. Pearson, New York, 2018.
- [4] Tamas Jonas. Sigmoid functions in reliability based management. Periodica Polytecnica, 15/2:67–72, 2007. <http://www.pp.bme.hu/so>.
- [5] Philippe Jorion. Value at Risk, volume 1. McGraw Hill, 2001.
- [6] Helmut Kopka and Sebastian Rahtz. L^AT_EX: eine Einführung, volume 54. Addison-Wesley, 1991.
- [7] N. Balakrishnan N. Johnson, S.Kotz. Continuous Univariate Distributions, volume 2 of Wiley - Interscience Publication. John Wiley & SONS, INC., second edition, 1995.
- [8] Walter Rudin. Principles of Mathematical Analysis. McGraw-Hill, New York, 1990.
- [9] Paul Wilmott. Quantitative Finance. Wiley, New York, 2018.